

Title	レプリカ理論と非線形帯磁率(A.スピングラスの分子場理論と磁場効果,基研短期研究会「スピングラスとその周辺」,研究会報告)
Author(s)	香取, 真理; 鈴木, 増雄
Citation	物性研究 (1985), 45(2): 107-111
Issue Date	1985-11-20
URL	<a href="http://hdl.handle.net/2433/91865">http://hdl.handle.net/2433/91865</a>
Right	
Type	Departmental Bulletin Paper
Textversion	publisher

アモルファス磁性体の相転移

奥 通敬 (東 大)

## F. スピングラスの理論

スピングラスの量子効果

石井魔湖, 山本哲也 (大 阪 市 大)

量子的なスピングラスの基底状態の数値的研究

西森秀稔, 小口武彦, 田口善弘 (東 工 大)

イジングスピングラスの横磁場効果

永井旺二郎 (神 戸 大)

相転移の新しい近似法

鈴木 増雄 (東 大)

アニール±J イジング系の成分としてのボンドクエンチ系

笠井 康弘 (阪 大)

平面格子±J ボンドモデル系の基底状態

小畑 修二 (電 機 大)

( \* は報告なし )

## レプリカ理論と非線形帯磁率

東大・理 香取真理, 鈴木増雄

スピングラスの研究において, レプリカ理論はその平均場近似として多くの知見を与えている。ここでは, レプリカ理論を解説し, スピングラス相転移に特有な非線形帯磁率の異常について述べる。

### § 1. レプリカ理論

平均場近似が厳密に正しいモデルとして, Sherrington-Kirkpatrick (SK) モデルが知られている。<sup>1)</sup>  $N$  コのイジング・スピン系  $\{S_i\}$  ( $i = 1 \cdots N$ ) において, すべてのスピン対に相互作用  $J_{ij}$  が働き, この  $J_{ij}$  が次のようなサイトに依らぬ一様な確率分布に従うというモデルである;

$$P(J_{ij}) = (2\pi J^2)^{-\frac{1}{2}} \exp \left[ - (J_{ij} - J_0/N)^2 / 2 (J^2/N) \right] \quad (1.1)$$

(以下  $\int \prod_{(ij)} [P(J_{ij}) dJ_{ij}] Q\{J_{ij}\} \equiv \langle Q \rangle_{av}$  と書く。)

この系において, 次のような自由エネルギーのクエンチ平均を評価する;

$$Z\{J_{ij}\} = \text{Tr}_{(s_i)} \exp(-\mathcal{H}/k_B T) \quad (1.2)$$

$$F = -k_B T \langle \ln Z \{ J_{ij} \} \rangle_{av} \quad (1.3)$$

数学的恒等式

$$\ln x = \lim_{n \rightarrow 0} \frac{1}{n} (Z^n - 1) \quad (1.4)$$

に基づいたレプリカ法<sup>2)</sup>の結果、これは次式のように、 $n(n-1)/2$ 個の補助変数  $q^{(\alpha\beta)}$  と  $n$  個の補助変数  $m^\alpha$  ( $\alpha, \beta = 1 \cdots n, q^{(\alpha\alpha)} = 0$ ) の関数の極小値の  $n \rightarrow 0$  の極限值として評価できることが示された；<sup>1)</sup>

$$\begin{aligned} \frac{F}{N} = \lim_{n \rightarrow 0} \frac{1}{n} \text{Min} \left[ -\frac{n J^2}{4 k_B T} + k_B T \left\{ \frac{1}{2} \left( \frac{J}{k_B T} \right)^2 \sum_{(\alpha, \beta)} (q^{(\alpha\beta)})^2 \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{1}{2} \frac{J_0}{k_B T} \sum_{\alpha} (m^\alpha)^2 - \ln \text{Tr}_{\langle s^\alpha \rangle} \exp(-\beta \mathcal{H}_{\text{eff}}) \right\} \right] \end{aligned} \quad (1.5)$$

$$-\beta \mathcal{H}_{\text{eff}} = \left( \frac{J}{k_B T} \right)^2 \sum_{(\alpha, \beta)} q^{(\alpha\beta)} s^\alpha s^\beta + \frac{1}{k_B T} \sum_{\alpha} (J_0 m^\alpha + H) s^\alpha \quad (1.6)$$

(1.5) の鞍点条件は

$$q^{(\alpha\beta)} = \langle s^\alpha s^\beta \rangle_{\text{eff}} \quad (1.7a)$$

$$m^\alpha = \langle s^\alpha \rangle_{\text{eff}} \quad (1.7b)$$

である ( $\langle \cdot \rangle_{\text{eff}}$  は (1.6) の  $\mathcal{H}_{\text{eff}}$  での熱平均)。 (1.7) は、スピングラスオーダーパラメタ  $q^{(\alpha\beta)}$  と磁化  $m^\alpha$  とのセルフコンシステント方程式と見なすこともできるが、実際には上述のように  $n(n+1)/2$  次元空間での変分問題であり、解の安定性の議論が必要となる。<sup>3)</sup>

Parisi は、この問題に対して次のような処方箋を提案した。<sup>4)</sup> i)  $n \times n$  の行列で表現される  $q^{(\alpha\beta)}$  に、第 1 図のような階層構造を仮定し、ii)  $n \rightarrow 0$  の極限操作をまず行なって  $q^{(\alpha\beta)}$  を  $0 \leq x \leq 1$  の上の関数  $q(x)$  に移行させこの関数をもって  $F/N$  を表現し、iii)  $q(x)$  を  $x$  の関数として変分を実行し、 $F/N$  の極大値を与えるように  $q(x)$  を定める。Parisi はこの処方箋に従って第 2 図のような相図を得た。

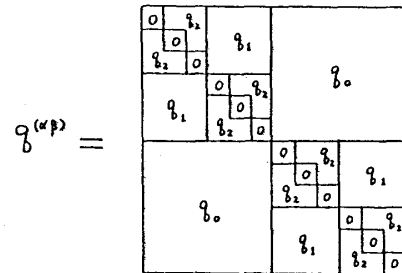
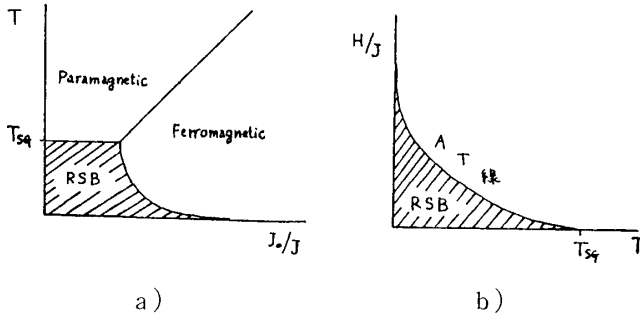


図1 Parisi の  $q^{(\alpha\beta)}$  の階層構造

図の斜線部に入ると  $q(x)$  が  $x$  の恒等関数でなくなる。境界線でレプリカ対称性の破れ (RSB) を伴う相転移が起こるという結論である。



第2図 イジングSKモデルの相図

このスピングラス相転移が、実際には何によって観測され得るであろうか。 $H=0$ かつ $T=J/k_B \equiv T_{SG}$ の点は、スピングラスオーダーパラメタ $q(x)$ が自発的に現れる点であり、ここで何らかの応答の異常が観測されるはずである。

## § 2. 非線形帯磁率の異常

実験では、 $T=T_{SG}$ で線形帯磁率 $\chi_0 = \left. \frac{dm}{dH} \right|_{H \rightarrow 0}$ はカスプを示すのみであるが、非常に弱い磁場 $H$ をかけるとカスプが急に滑らかになることが報告された。<sup>5)</sup> 筆者の一人は、このことから

非線形帯磁率 $\chi_2 = \left. \frac{d^3 m}{dH^3} \right|_{H \rightarrow 0}$ が $T=T_{SG}$ で負に発散することを現象論的に示した；<sup>6)</sup>

$$\chi_2 \propto -1/(T-T_{SG})^{r_S} \quad (T \gtrsim T_{SG}) \quad (2.1)$$

このことは、レプリカ理論においても示すことができる（この場合 $r_S=1$ である）。<sup>7)</sup>

$T \geq T_{SG}$ の領域では、セルフ・コンシステント方程式(1.7)は

$$q = (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \int dz \exp(-z^2/2) \tanh^2 \left( \frac{Jq^{1/2}}{k_B T} z + \frac{J_0 m}{k_B T} + \frac{H}{k_B T} \right) \quad (2.2a)$$

$$m = (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \int dz \exp(-z^2/2) \tanh \left( \frac{Jq^{1/2}}{k_B T} z + \frac{J_0 m}{k_B T} + \frac{H}{k_B T} \right) \quad (2.2b)$$

で与えられる。<sup>1)</sup> 私たちは、次のようなスケーリング極限をとることにより、これらの式をスケリトン化し、磁化 $m$ の非線形部分についてスケーリング解を得た：<sup>8)</sup>

$$\text{Sc-limit} \iff \lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ H \rightarrow 0}} \quad \text{with } \frac{H}{t} = \text{const.}$$

$$(t = (T-T_{SG})/T_{SG}) \quad (2.3)$$

$$\frac{m - \chi_0 H}{\chi_0 H} \xrightarrow{\text{Sc-limit}} -\frac{T_{SG}}{T_{SG} - T_0} t \frac{1}{2} \left[ -1 + \sqrt{1 + 2 \frac{(\chi_0 H)^2}{t^2}} \right] \quad (2.4)$$

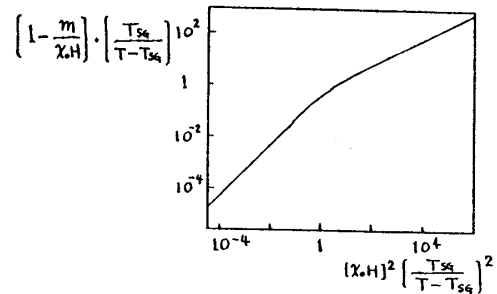
( $T_0 = J_0/k_B$ )

これは、以前に現象論によって示したスケーリング則<sup>6)</sup>

$$\frac{m - \chi_0 H}{\chi_0 H} \simeq t^B f\left(\frac{(\chi_0 H)^2}{t^{\beta+r_S}}\right) \quad (2.5)$$

のスケーリング関数  $f(x)$  を、レプリカ理論において陽に求めたものであり ( $\beta = r_S = 1$ ), その振舞いを第3図に示す。<sup>8)</sup>

$\chi_2$  の発散は、都らによって実験的にはじめて検証された。<sup>9)</sup> また上述のスケーリング則の成立についても、フランスのグループの報告がある。<sup>10)</sup>



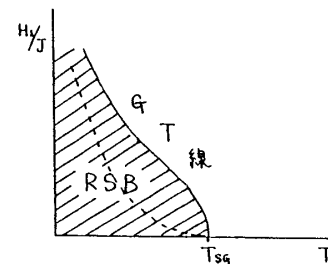
第3図 スケーリング則

### § 3. 磁場中の $m$ -ベクトル SK モデル

イジング SK モデルについて得られた相図 (第2図 b)) を見ると、スピングラス相 (RSB 相) は外場  $H$  によって強く抑制される<sup>3)</sup> ことがわかる。しかし、より現実的な  $m$  成分ベクトルスピンから成るスピングラス系ならば、磁場に対して垂直でこの影響を直接的には受けない成分があるので、もっとスピングラス相が現れやすいのではないか。Gabay と Toulouse は、

$$\sum_{\mu=1}^m S_{i\mu}^2 = m \quad (3.1)$$

という規格化条件を満たす  $m$  成分ベクトルスピンの SK モデルを提案し、第4図のような相図を得た。<sup>11)</sup> GT 線と呼ばれる境界線  $T_{GT}(H_1)$  で、外場  $H_1$  に対して垂直なスピングラスオーダー  $q_{\perp}(x)$  が自発的に出現し、<sup>11)</sup> 同時にレプリカ対称性が破れる。<sup>12)</sup>



第4図  $m$ -ベクトル SK モデルの相図

この GT 線は、イジング SK モデルにおいて  $q(x)$  が自発的に出現し、同時にレプリカ対称性が破れる点 ( $H=0$ ,  $T=T_{SG}$ ) と同様な相転移線である。私たちは、この相転移に伴って、 $H_1$  に垂直な方向にかけた外場  $H_{\perp}$  に対する非線形帯磁率が発散することを現象論的に示し、<sup>13)</sup> さらに  $m$ -ベクトル SK モデルについて (2.4) と同様の次のようなスケーリング則を得た：<sup>8)</sup>

$$\frac{m_{\perp}(H_{\perp})}{\chi_{\perp\perp}^{(1)} H_{\perp}} - 1 \simeq t^{\beta} \kappa_1 \left[ -1 + \left( 1 + \kappa_2 \frac{h_{\perp}^2}{t^{\beta+r_S}} \right)^{\frac{\beta}{\beta+r_S}} \right],$$

$$\frac{m_{\parallel}(H_{\perp}) - m_{\parallel}(H_{\perp} = 0)}{\chi_{\parallel, \perp}^{(2)} H_{\perp}^2} - 1 \simeq \left( \frac{h_{\perp}^2}{t^{\beta+r_S}} \right)^{-\frac{\beta}{r_S}} \kappa_3 \left[ -1 + \left( 1 + \kappa_4 \frac{h_{\perp}^2}{t^{\beta+r_S}} \right)^{\frac{\beta}{\beta+r_S}} \right]^{\frac{\beta+r_S}{r_S}} \quad (3.3)$$

ただし,  $h_{\perp} \equiv \chi_{\perp\perp}^{(1)}(H_1) H_{\perp}$ ,  $t = (T - T_{\text{GT}}(H_1))/T_{\text{GT}}(H_1)$ ,  $\kappa_i = \kappa_i(H_1)$  ( $i = 1 \sim 4$ ) であり, レプリカ理論では  $\beta = r_S = 1$  である。

### 参考文献

- 1) D. Sherrington and S. Kirkpatrick, Phys. rev. Lett. **35** (1975), 1792.
- 2) S. F. Edwards and P. W. Anderson, J. Phys. **F5** (1975), 965.
- 3) J. R. L. de Almeida and D. J. Thouless, J. Phys. **A11** (1978), 983.
- 4) G. Parisi, Phys. Lett., **A73** (1979), 205; Phys. Rev. Lett. **23** (1979), 1754; J. Phys. **A13** (1980) L115, 1101, 1887.
- 5) V. Cannella and J. A. Mydosh, Phys. Rev. **B6** (1972), 4220.
- 6) M. Suzuki, Prog. Theor. Phys. **59** (1977), 1151.
- 7) K. Wada and H. Takayama, Prog. Theor. Phys. **64** (1980), 327.
- 8) M. Katori and M. Suzuki, submitted to Prog. Theor. Phys.
- 9) Y. Miyako, S. Chikazawa, T. Saito and Y. G. Youchunas, J. Phys. Soc. Japan **46** (1979), 1951.  
Y. Miyako, S. Chikazawa, T. Sato and T. Saito, J. Magn. Magn. Mat. **15-18** (1980), 139.
- 10) R. Omari, J. J. Prejean and J. Souletie, J. Physique **44** (1983), 1069.
- 11) M. Gabay and G. Toulouse, Phys. Rev. Lett. **47** (1981), 201.  
G. Toulouse and M. Gabay, J. Physique. Lett. **42** (1981), L103.
- 12) D. M. Cragg, D. Sherrington and M. Gabay, Phys. Rev. Lett. **49** (1982), 158.  
M. Gabay, T. Garel and C. De Dominicis, J. Phys. **C15** (1982), 7165.
- 13) M. Suzuki, Prog. Theor. Phys. **73** (1985), 830.